

§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

1. Hoán vị

a) Hoán vị

Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A).

Ví dụ 1. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Hãy viết tám hoán vị của A .

Giải

Tám hoán vị của A là (a, b, c, d) , (a, b, d, c) , (a, c, b, d) , (a, c, d, b) , (c, d, a, b) , (c, d, b, a) , (b, c, a, d) , (b, c, d, a) .

b) Số các hoán vị

Định lí 1

Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$.

Ví dụ 2. Một đoàn khách du lịch dự định đến tham quan bảy địa điểm A, B, C, D, E, G và H ở thủ đô Hà Nội. Họ đi tham quan theo một thứ tự nào đó, chẳng hạn $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H$. Như vậy, mỗi cách chọn thứ tự các địa điểm tham quan là một hoán vị của tập hợp $\{A, B, C, D, E, G, H\}$. Do đó, đoàn khách có tất cả $7! = 5040$ cách chọn.

2. Chỉnh hợp

a) Chỉnh hợp là gì?

Cho tập hợp A có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (hay chỉnh hợp chập k của A).

Ví dụ 3. Cho tập hợp $A = \{a, b, c\}$. Hãy viết tất cả các chỉnh hợp chập 2 của A .

Giải

Các chỉnh hợp chập 2 của A là (a, b) , (b, a) , (a, c) , (c, a) , (b, c) , (c, b) . Có tất cả 6 chỉnh hợp.

b) Số các chỉnh hợp

Định lí 2

Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

Quy ước: $0! = 1$ và $A_n^0 = 1$.

Chú ý: Với $0 \leq k \leq n$ ta có $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vector khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này?

Giải

Mỗi vector có thể xem là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp gồm 6 điểm đã cho. Vậy số vector cần tìm là $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

3. Tổ hợp

a) Tổ hợp là gì?

Cho tập hợp A có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (hay một tổ hợp chập k của A).

Ví dụ 5. Viết tất cả các tổ hợp chập 3 của tập $A = \{a, b, c, d\}$.

Giải

Tất cả các tổ hợp chập 3 của A là $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$.

b) Số các tổ hợp

Định lí 3

Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Quy ước: $C_n^0 = 1$.

Chú ý: Với $0 \leq k \leq n$ ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ví dụ 6. Trong một lớp có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ đi tham gia chiến dịch “Mùa hè xanh” của Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Ta có $C_{20}^4 = \frac{20.19.18.17}{1.2.3.4} = 4845$ cách chọn 4 học sinh nam và có $C_{15}^3 = \frac{15.14.13}{1.2.3} = 455$ cách chọn 3 học sinh nữ. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là $4845.455 = 2204475$.

4. Hai tính chất cơ bản của số C_n^k

a) Tính chất 1

Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

b) Tính chất 2 (hằng đẳng thức Pa-xcan)

Cho các số nguyên n và k với $1 \leq k \leq n$. Khi đó $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Biên soạn: Huỳnh Kim Dũng.